数理解析研究所講究録
1062巻 1998年 15-24

STARLIKENESS OF MEROMORPHIC AND α-CONVEX FUNCTIONS

和歌山大学教育学部　福井誠一　(Seiichi FUKUI)

1　導入

池田氏は［2］で次の結果を発表した。

定理　A　　関数　$f(z)=\dfrac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots$ を $0<|z|<1$ で正則とする。

任意の実数 α に対して、

$$\mathrm{Re}\{\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\}<0,\qquad |z|<1 \tag{1}$$

がみたされれば、

$$\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}<0,\qquad |z|<1 \tag{2}$$

が成立する。

定理　B　　関数　$f(z)=\dfrac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots$ を $0<|z|<1$ で正則とする。

$\alpha>1,\ 0<\beta<1$ に対して

(i)　$0<\beta\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき、

$$\mathrm{Re}\{\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\}>-\frac{\alpha\beta}{2(1-\beta)}-\beta,\qquad |z|<1 \tag{3}$$

で、ここに $\alpha>\dfrac{2(1-\beta)^2}{\beta}$ とする。

(ii)　$\dfrac{1}{2}<\beta<1$ のとき、

$$\mathrm{Re}\{\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\}>-\frac{\alpha(1-\beta)}{2\beta}-\beta,\qquad |z|<1 \tag{4}$$

で、ここに $\alpha>2\beta$ とする。　このとき、

$$\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}<-\beta, \quad |z|<1 \tag{5}$$

が成立する。

この報告では、p-valent(p葉)な関数についても同様な結果が得られることを示し、同時に池田氏の結果の拡張定理も得られることを示す。

2 準備

pを正の整数として、$\Sigma(p)$を単位円 $U=\{z;|z|<1\}$ で、

$$f(z)=\frac{1}{z^p}+a_0+a_1z+\cdots\cdots$$

の形に表される原点でのみ p 位の極をもつ有理型関数の集合とする。このとき、$f(z)\in\Sigma(p)$ に対して、

$$F(z)=\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}, \qquad p(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)} \tag{6}$$

とおくと、形式的な計算により

$$p(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)}=-p+a_0pz^p+\cdots\cdots,$$

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=p(z)+\frac{zp'(z)}{p(z)}=-p-\frac{p+1}{p}a_1z^{p+1}\cdots\cdots \tag{7}$$

となる。また、

$$F(z)=p(z)+\alpha\frac{zp'(z)}{p(z)}=-p+(1-\alpha)a_0pz^p+\cdots\cdots$$

である。(注 関数 p(z) と整数 p とは紛らわしいがこのまま使うことにする。)

有理型関数 $f(z)\in\Sigma(p)$ がα-convex であるとは、一般には $\mathrm{Re}F(z)<0$, $|z|<1$ をいうのであろうが、ここでは、$\mathrm{Re}F(z)<\beta$または $\mathrm{Re}F(z)>\beta$, $|z|<1$ も含めて考える。後に必要となる補題を示す。

補題1 ([1] または [3],[4])

関数 $w(z)=a_pz^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots\cdots$ を $a_p\neq0$, $p\geqq1$ とし、$|z|<R$ で正則とする。

いま、$\underset{|z|\leq r}{\mathrm{Max}}\,|w(z)|=|w(z_0)|, z_0=re^{i\theta}$, $r< R$ が成立すれば、$\dfrac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)}=m$

は実数で、かつ $m\geq p$ となる。

補題 2 関数 $p(z)=a+a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots\cdots$ をUで正則とする。ある $z_0\in U$ に対し、$|z|<|z_0|$ のとき、$\mathrm{Re}\ p(z)<\gamma$、かつ $\mathrm{Re}\ p(z_0)=\gamma$ をみたし、$a<0$, $a<\gamma$ ならば

$$\mathrm{Re}\ \frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}\begin{cases}\geq \dfrac{n\gamma}{2(\gamma-a)}, & (\gamma\geq 0) & (8)\\[2ex] \leq \dfrac{n\gamma}{2(\gamma-a)}, & \left(0\geq\gamma\geq\dfrac{a}{2}\right) & (9)\\[2ex] \leq \dfrac{n(\gamma-a)}{2\gamma}. & \left(\dfrac{a}{2}\geq\gamma>a\right) & (10)\end{cases}$$

が成立する。

（証明） $\delta=2\gamma-a$ とおくと、γは a とδ の中点である。 よって、

$$\frac{p(z)-a}{p(z)-\delta}=w(z)\quad \text{または、}\quad p(z)=\frac{a-\delta w(z)}{1-w(z)} \tag{11}$$

で $w(z)$ を定義する。 簡単な計算により

$$1-|w(z)|^2=1-\left|\frac{p(z)-a}{p(z)-\delta}\right|^2=\frac{4(\gamma-\mathrm{Re}\ p(z))(\gamma-a)}{|p(z)-\delta|^2}>0$$

を得る。 これは、

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\ p(z)<\gamma,\ |z|<|z_0| &\iff |w(z)|<1,\\ \mathrm{Re}\ p(z_0)=\gamma &\iff |w(z_0)|=1\end{aligned} \tag{12}$$

を示している。

一方、$p(z)$ の仮定から $w(z)=b_nz^n+b_{n+1}z^{n+1}+\cdots\cdots$ は U で正則で、かつ $w(z)\neq 1$ となる。 よって、 $\underset{|z|\leq|z_0|}{\mathrm{Max}}\,|w(z)|=|w(z_0)|=1$ をみたし、補題１が適用される。

これより、$\dfrac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)}=m\in R$（実数）で、$m\geq n$, $w(z_0)=e^{i\theta}$（θは実数で$\theta\neq 2k\pi$）

となる。 また（11）を対数微分して

$$\frac{zp'(z)}{p(z)}=\frac{zw'(z)}{w(z)}\left(\frac{w(z)}{1-w(z)}-\frac{\delta w(z)}{a-\delta w(z)}\right), \tag{13}$$

$$\therefore\quad \frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}=m\left(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}-\frac{\delta e^{i\theta}}{a-\delta e^{i\theta}}\right) \tag{14}$$

を得、 $\dfrac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$ となる。 また、

$\mathrm{Re}\dfrac{\delta e^{i\theta}}{a-\delta e^{i\theta}}$ の最大値、最小値を調べて（計算は省略）まとめると、次のように

なる。

$$\frac{a}{2}<0<\gamma \text{ のとき、}\quad \mathrm{Re}\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}\geqq\frac{n\gamma}{2(\gamma-a)}, \tag{15}$$

$$\frac{a}{2}<\gamma<0 \text{ のとき、}\quad \mathrm{Re}\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}\leqq\frac{n\gamma}{2(\gamma-a)}, \tag{16}$$

$$a<\gamma<\frac{a}{2} \text{ のとき、}\quad \mathrm{Re}\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}\leqq\frac{n(\gamma-a)}{2\gamma} \tag{17}$$

が得られる。$\gamma=0$、$\gamma=\dfrac{a}{2}$ のときは別に吟味すればよい。 □

注意　$\gamma=0$ のときは、(15)、(16) により $\mathrm{Re}\dfrac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}=0$ となる。

等号は $p(z)=\dfrac{a-\delta\zeta^n}{1-\zeta^n}$, $\zeta^n=e^{it}\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n$ （t は実定数)のとき成立している。

実際に応用する場合には $p(z)=\dfrac{a-\delta z^n}{1-z^n}$ が極値関数として使われる。 すなわち、

任意の $z\in U$ に対し、$\mathrm{Re}\,p(z)<\gamma$ で、$\mathrm{Re}\,p(z_0)=\gamma$, $|z_0|=1$ となる。

3　主定理

定理　1　　$f(z)\in\Sigma(p)$ で、$-p<\beta$, $\gamma\geqq 0$, $\alpha\geqq 0$ かつ

$$\gamma+\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{p\gamma}{\gamma+p}\geqq\beta \tag{18}$$

がみたされているとする。　さらに、このとき

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}<\beta,\quad |z|<1 \tag{19}$$

ならば、　$\mathrm{Re}\,\dfrac{zf'(z)}{f(z)}<\gamma,\quad |z|<1$ が成立する。

注意　一般には、$f(z)\in\Sigma(p)$ に対し $p(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$、が正則になる保証はないが、除去可能のリーマンの定理と 条件 (19) により正則関数になる。

（証明）　準備のところで示したように、定理は簡単に

$$\mathrm{Re}\ F(z)<\beta,\quad |z|<1 \implies \mathrm{Re}\ p(z)<\gamma,\quad |z|<1$$

を示せばよい。

$F(0)=-p$, $p(0)=-p$ であったから、$-p<\beta$, $-p<\gamma$ は必要な条件で、しかもこれは仮定によりみたされている。すなわち、$z=0$ の近傍では定理が成立していることを示す。

今、ある点 $z_0\in U$ が存在して、$|z|<|z_0|$ のとき $\mathrm{Re}\ p(z)<\gamma$ でかつ, $\mathrm{Re}\ p(z_0)=\gamma$ が成立したとすると、補題２を $a=-p$, $n=p$ として適用する。(15) より

$$F(z_0)=p(z_0)+\alpha\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}$$ と $\gamma>0$ のとき、$\alpha>0$ で

$$\mathrm{Re}\ F(z_0)\geqq\gamma+\alpha\frac{p\gamma}{2(\gamma+p)}\geqq\beta$$ となり、仮定　任意の $z\in U$ に対して $\mathrm{Re}\ F(z)<\beta$ に反する。よって、このような $z_0\in U$ は存在しないことになり、定理が成立する。　また、$\gamma=0$ または $\alpha=0$ の場合も成立している。　□

また、同様にして次の結果が得られる。

<u>定理　2</u>　$f(z)\in\Sigma(p)$ とする。$-p>\beta$, $\alpha\geqq 0$ かつ

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\beta,\quad |z|<1$$

がみたされているとする。　さらに、このとき

(i)　$0\geqq\gamma\geqq-\dfrac{p}{2}$ のとき、　$\gamma+\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{p\gamma}{\gamma+p}\leqq\beta$、　(20)

(ii) $\quad -\dfrac{p}{2} \geqq \gamma > -p$ のとき、 $\quad \gamma + \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{p(\gamma+p)}{\gamma} \leqq \beta \qquad (21)$

ならば、 $\quad \mathrm{Re}\,\dfrac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma, \quad |z| < 1$ が成立する。

<u>定理 3</u> $\quad f(z) \in \Sigma(p)$ とする。 $-p > \beta,\ \alpha \leqq 0$ かつ

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \beta, \quad |z| < 1$$

がみたされているとする。 さらに、このとき $\gamma \geqq 0$,

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{p\gamma}{\gamma+p} \leqq \beta \qquad (22)$$

ならば、 $\quad \mathrm{Re}\,\dfrac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma, \quad |z| < 1$ が成立する。

<u>定理 4</u> $\quad f(z) \in \Sigma(p)$ で、$-p < \beta,\ \alpha \leqq 0$ かつ

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} < \beta, \quad |z| < 1$$

がみたされているとする。 さらに、このとき

(i) $\quad 0 \geqq \gamma \geqq -\dfrac{p}{2}$ のとき、 $\quad \gamma + \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{p\gamma}{\gamma+p} \geqq \beta$、 $\qquad (23)$

(ii) $\quad -\dfrac{p}{2} \geqq \gamma > -p$ のとき、 $\quad \gamma + \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{p(\gamma+p)}{\gamma} \geqq \beta \qquad (24)$

ならば、 $\quad \mathrm{Re}\,\dfrac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma, \quad |z| < 1$ が成立する。

4 応用

定理1で $\alpha=1$ とおくと次を得る。

<u>系 1</u> $\quad f(z) \in \Sigma(p)$ に対して、 $\mathrm{Re}\left\{1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} < 0, \quad |z| < 1$ がみたされるとき、

$\mathrm{Re}\,\dfrac{zf'(z)}{f(z)} < 0, \quad |z| < 1$ が成立する。 これは最良の結果である。

（系１の証明） 定理１で $\alpha=1$ とおくと、$f(z)=\dfrac{1}{z^p}+a_0+a_1z+\cdots\cdots$ のとき、$-p<\beta$,

$\gamma\geqq 0$, で (18) 式の条件をみたし、 $\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right)<\beta$, $|z|<1$ なら、

$\mathrm{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}<\gamma$, $|z|<1$ が成立する。このとき、$\beta=0$ とおくと $\gamma\geqq 0$ を得て $\gamma=0$

となる。 また、(18) 式 で $\gamma=0$ とおくと $0\geqq\beta>-p$ より $\beta=0$ が最良となる。

関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^p}-2+z^p=\dfrac{(1-z^p)^2}{z^p}$ がその限界を保証する。このとき、

$\dfrac{zf'(z)}{f(z)}=-p\cdot\dfrac{1+z^p}{1-z^p}$ 、 $1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}=-p\cdot\dfrac{1+z^{2p}}{1-z^{2p}}$ である。 □

注意　ここでいう最良とは、固定されたβに対してγの最小値が最良であるし、また、γが固定されたときはβの最大値が最良である。

次に、定理２で $\alpha=1$ とおくことはできない。何故なら、(20)、(21)で $\alpha=1$ のとき、β、γのみたす値は存在しないから。

定理　１、２、３、４で $p=1$ とおくと、それぞれ次の定理となる。

<u>定理　1</u>′　$f(z)\in\Sigma(1)$ で、$-1<\beta$, $\gamma\geqq 0$, $\alpha\geqq 0$ かつ

$$\gamma+\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+1}\geqq\beta$$

がみたされているとする。 さらに、このとき

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}<\beta,\quad |z|<1$$

ならば、 $\mathrm{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}<\gamma$, $|z|<1$ が成立する。

<u>定理　2</u>′　$f(z)\in\Sigma(1)$ で、$-1>\beta$, $\alpha\geqq 0$ かつ

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\beta,\quad |z|<1$$

がみたされているとする。 さらに、このとき

(i)　$0 \geqq \gamma \geqq -\dfrac{1}{2}$ のとき、　$\gamma + \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{\gamma}{\gamma+1} \leqq \beta$、

(ii)　$-\dfrac{1}{2} \geqq \gamma > -1$ のとき、　$\gamma + \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{\gamma+1}{\gamma} \leqq \beta$

ならば、　$\mathrm{Re}\, \dfrac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma$,　$|z| < 1$ が成立する。

<u>定理　3′</u>　　$f(z) \in \Sigma(1)$ で、$-1 > \beta$,　$\gamma \geqq 0$,　$\alpha \leqq 0$ かつ

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+1} \leqq \beta$$

がみたされているとする。　さらに、このとき

$$\mathrm{Re}\,\{\alpha(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}) + (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > \beta, \quad |z| < 1$$

ならば、　$\mathrm{Re}\, \dfrac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma$,　$|z| < 1$ が成立する。

<u>定理　4′</u>　$f(z) \in \Sigma(1)$ で、$-1 < \beta, \alpha \leqq 0$ かつ

$$\mathrm{Re}\,\{\alpha(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}) + (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\} < \beta, \quad |z| < 1$$

がみたされているとする。　さらに、このとき

(i)　$0 \geqq \gamma \geqq -\dfrac{1}{2}$ のとき、　$\gamma + \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{\gamma}{\gamma+1} \geqq \beta$、

(ii)　$-\dfrac{1}{2} \geqq \gamma > -1$ のとき、　$\gamma + \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{\gamma+1}{\gamma} \geqq \beta$

ならば、　$\mathrm{Re}\, \dfrac{zf'(z)}{f(z)} < \gamma$,　$|z| < 1$ が成立する。

定理1′より定理Λが得られる。

<u>系　2</u>　定理Λが成立する。

（証明）　定理1′で $\gamma = 0$ とおくと、$-1 < \beta \leqq 0$、$\alpha \geqq 0$ のとき $\mathrm{Re}\, F(z) < \beta$,

$|z| < 1$ なら $\mathrm{Re}\, \dfrac{zf'(z)}{f(z)} < 0$,　$|z| < 1$ が成立する。よって、$\beta = 0$ となる。$\alpha < 0$ の

場合は（ $\alpha \geqq 0$ の場合も含めて）次のようにして示せる。$\gamma = 0$ のときは、

$\mathrm{Re}\dfrac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = 0$ だから、αの値に関係なく $\mathrm{Re}\, F(z_0) = \mathrm{Re}\, p(z_0) + \alpha\, \mathrm{Re}\dfrac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = 0$

となり $\mathrm{Re}\, F(z) < \beta = 0,\ |z| < 1$ に反するからである。よって、証明された。 □

<u>系　3</u>　　定理Bが成立する。

定理2′で γを $-\beta$とおけばよい。　このとき、$\alpha \geqq 0,\ 0 < \beta < 1$ で

(i)　$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき、　　$-\beta - \dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\beta}{1-\beta} < -1$、

(ii)　$\dfrac{1}{2} \leqq \beta < 1$ のとき　　$-\beta - \dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1-\beta}{\beta} < -1$

は必要な条件である。　特に、$\beta = 0$ のときも成立していることに注意する。

<u>系　4</u>　　$f(z) \in \Sigma(1)$ に対して、$\mathrm{Re}\left(1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < 0,\quad |z| < 1$ がみたされるとき、

$\mathrm{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)} < 0,\quad |z| < 1$ が成立する。　これは最良の結果である。

系1を証明したときと同様にすればよい。

関数　$f(z) = \dfrac{1}{z} - 2 + z = \dfrac{(1-z)^2}{z}$　がその極値関数となる。このとき、

$\dfrac{zf'(z)}{f(z)} = -\dfrac{1+z}{1-z}$、 $1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)} = -\dfrac{1+z^2}{1-z^2}$ である。

参考文献

[1] S. Fukui and K. Sakaguchi, An extension of a theorem of S. Ruscheweyh, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. Nat. Sci., 29(1980), 1-3.

[2] A. Ikeda, On meromorphic α－starlike functions, 京都大学数理解析研究所講究録 1012、(1997)、20-24.

[3] I. S. Jack, Functions starlike and convex of order α, J. London Math. Soc., (2)3 (1971), 469-474.

[4] S. S. Miller and P. T. Mocanu, Second order differential inequalities in the complex plane, Journal of applications 65, (1978), 289-305.